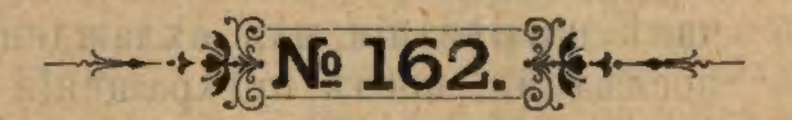
ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем.  № 6.

Содержаніе: Опредѣленіе теплоемкости стекла, *І. Косоногова.*—О безконечности, *М. Попруженко.*—О соотношении сторонъ правильныхъ вписанныхъ въ кругъ многоугольниковъ, *Э. Пфейфера.*—Опыты и приборы.—Изобрѣтенія и открытія. — Разныя извѣстія.—Доставленныя въ редакцію книги и брошюры.—Задачи №№ 464—469.—Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 302, 306, 320 и 1-ой серіи 351 и 495. — Списокъ нерѣшенныхъ задачъ 2-ой серіи. — Справ. табл. № XVI. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій. — Содержаніе научныхъ журналовъ.

Опредѣленіе теплоемкости стекла.

Въ маѣ и сентябрѣ прошлаго года мною было произведено изслѣдованіе теплоемкости стекла, присланнаго мнѣ инженеромъ Р. Н. Савельевымъ.

Опредѣленіе производилось по способу смѣшенія *).

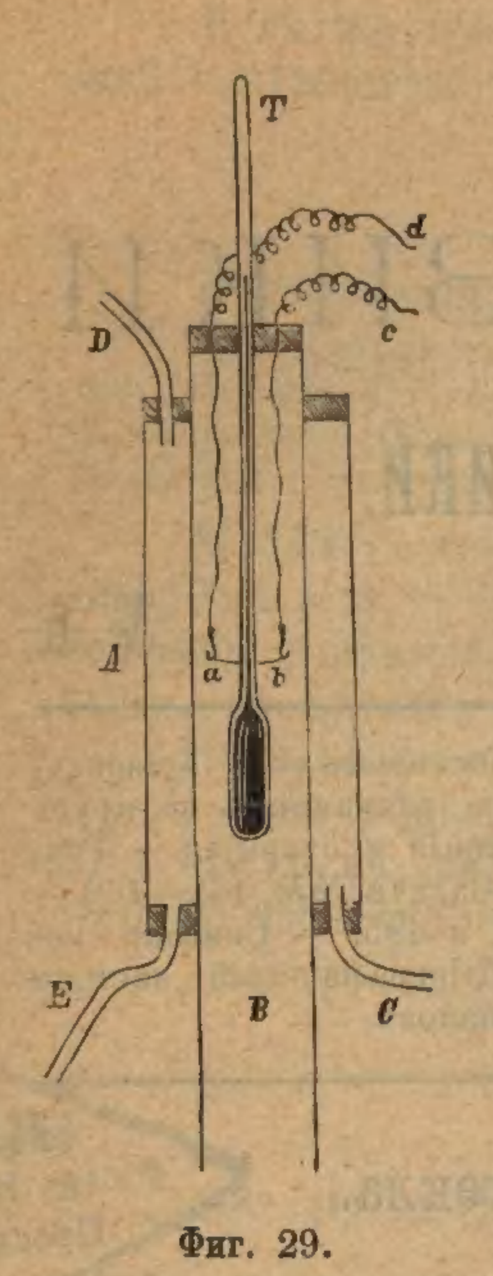
Въ моемъ распоряженіи имѣлся латунный вызолоченный калориметръ, вѣсомъ 12,7445 gr., работы Miller'а въ Инсбрукѣ, устанавливавшійся внутри другого латуннаго же сосуда, вызолоченнаго по внутренней поверхности. Вѣсъ наливавшейся въ калориметръ воды колебался въ различныхъ наблюденіяхъ отъ 56,010 gr. до 61,066 gr. Вѣсъ стекла въ первыхъ четырехъ наблюденіяхъ былъ 10,1155 gr., въ остальныхъ 12-ти — 9,8455 gr.

Опредѣленіе температуры калориметра и окружающей среды производилось по калориметрическимъ термометрамъ №№ 7421 и 7422 работы Baudin'а, раздѣленнымъ по скалѣ на 50-ыя доли градуса.

Температура нагрѣтаго стекла опредѣлялась по термометру № 9 (номеръ лабораторіи) работы Lenoir и Forster, раздѣленному на 5-ыя доли градуса.

Всѣ три термометра были предварительно провѣрены по нормальному термометру № 261 Fuess'а, принадлежащему физическому Институту Университета Св. Владиміра и имѣющему цертификатъ отъ Physikalisch-Technische Reichsanstalt въ Берлинѣ за № 150.

*) Wüllner. Lehrbuch d. Experimentalphysik. B. III. s. 390—400. 1875.



Фиг. 29.

Нагрѣваніе стекла производилось въ приборѣ, изображенномъ на фиг. 29. Онъ состоитъ изъ широкой стеклянной трубки А, въ которую на корковыхъ пробкахъ вставляется другая трубка, В — тоже стеклянная, но болѣе узкая и длинная, чѣмъ А. Въ нижнюю пробку вставляется изогнутая трубочка С, на которую надѣвается каучуковая трубка, приводящая пары кипящей воды въ пространство между А и В. Трубка D служитъ для отвода пара, а Е для отвода воды, образующейся въ началѣ нагрѣванія изъ охлажденныхъ паровъ; эта послѣдняя, послѣ прекращенія образованія воды, запирается пробкой.

Во внутреннюю трубку В вводился на корковой пробкѣ термометръ Т и располагался такъ, чтобы дѣленіе 100° отстояло отъ пробки не больше, какъ на 2—3°. Дѣлалось это во избѣжаніе охлажденія ртутнаго столбика термометра, выступающаго изъ нагрѣваемаго пространства и неизбѣжно связанной съ этимъ погрѣшности въ отсчетѣ температуры.

Черезъ эту же пробку входили въ трубку В двѣ проволоки *c* и *d*, шедшія отъ полюсовъ машины Грамма; на нѣкоторомъ разстояніи отъ шарика термометра эти проволоки соединялись при помощи тонкой платиновой нити *ab*. Въ одну изъ проволокъ *c* или *d*, около наблюдателя вставляется прерыватель.

Нагрѣваемое тѣло располагалось симметрично относительно резервуара термометра, что было легко сдѣлать, такъ какъ это былъ кусокъ трубки, и удерживалось въ такомъ положеніи при при помощи коконовой нити, зацѣпленной за платиновую нить *ab*.

При испытаніи пригодности этого прибора онъ оказался вполнѣ удовлетворяющимъ своему назначенію. Температура внутри трубки В при постоянномъ атмосферномъ давленіи оставалась, по достиженіи maximum'a, постоянной.

При производствѣ изслѣдованія, по достиженіи maximum'a температуры нагрѣваемаго стекла, нагрѣваніе продолжалось еще минутъ 20—30, чтобы быть увѣреннымъ въ равенствѣ температуръ стекла и термометра.

Примѣрно за полминуты до погруженія тѣла въ калориметръ опредѣлялась еще разъ температура тѣла, затѣмъ помощникъ начиналъ вращать колесо машины Грамма; наблюдатель, слѣдя по часамъ, въ желаемый моментъ замыкалъ прерыватель; коконовая нить мгновенно пережигалась накалявшейся проволокой *ab* и стекло сейчасъ же падало въ калориметръ.

Всѣ остальныя наблюденія и вычисленія производились, какъ уже сказано, по схемѣ, изложенной въ вышеуказанномъ мѣстѣ у Wüllner'a.

Средняя величина теплоемкости изслѣдованнаго мною стекла на основанiи данныхъ шестнадцати наблюденiй оказалась равной 0,1962 въ предѣлахъ отъ 20° до 100°, при средней ошибкѣ ± 0,0035.

I. Косоноговъ (Кіевъ).

О БЕЗКОНЕЧНОСТИ.

La notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en mathématiques, se réduit à ceci: après chaque nombre entier, il y en a un autre.

Jules Tannery. (Jntroduction à la théorie des fonctions d'une variable. 1886. p. VIII).

Слово безконечность и соотвѣтствующій знакъ ∞ употребляются въ математикѣ только для сокращенія рѣчи и письма.

(Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, 1884 г., Май. стр. 61).

Цѣль настоящей статьи заключается въ разсмотрѣніи термина безконечность, главнымъ образомъ, въ отношеніи къ безконечно-большимъ и безконечно-малымъ величинамъ.

Статья преслѣдуетъ скромныя школьныя задачи, и потому вовсе не касается того значенія безконечности, которое нѣкоторые авторы приписываютъ ей въ новѣйшихъ и высшихъ отдѣлахъ математики*). И это съ тѣмъ большимъ основаніемъ, что даже въ своей спеціальной области это послѣднее значеніе не получило, кажется, окончательнаго права гражданства.

I.

Терминъ „безконечность" употребляется въ различныхъ значеніяхъ. Одно изъ нихъ, которое я пока и буду имѣть въ виду, просто указываетъ на отсутствіе въ разсматриваемомъ объектѣ границъ. „Слово безконечность, говоритъ *Дюгамель***), употребляется для выраженія отсутствія предѣла или какой ни есть границы; такимъ образомъ пространство и время, — говорятъ, — безконечны***). Идея эта исключаетъ очевидно идею всякаго сравненія съ величиною". Послѣдній пунктъ и очевиденъ, и важенъ.

---

*) См. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen von *Cantor*. 1883.

**) *Дюгамель*. Основанія исчисленія безконечно-малыхъ, стр. 14.

***) Съ точки зрѣнія философскаго языка термины „безконечный" (infini) и „безпредѣльный" (indéfini) не тождественны. Разница между ними впервые была, кажется, указана *Декартомъ* въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Кардиналъ Куза и многіе другіе доктора предполагаютъ міръ безконечнымъ и по отношенію къ этому вопросу никогда не были не одобрены церковью; напротивъ, всѣ полагаютъ, что представлять великимъ дѣло рукъ Божіихъ — значитъ чтить Бога. Мое мнѣніе представляетъ еще менѣе трудностей, чѣмъ ихнее; ибо я не говорю, что міръ

Очевиденъ, потому что какъ-же, въ самомъ дѣлѣ, сравнивать количественно два объекта, не имѣющіе признаковъ величины. Важенъ, потому что противъ него погрѣшали и погрѣшаютъ; и поэтому, чтобы разъяснить вопросъ болѣе полно, я позволю себѣ прибѣгнуть къ иллюстраціи его посредствомъ геометрическаго примѣра.

II.

Я напомню читателямъ *Бертраново* доказательство 11-й аксіомы *Евклида* въ упрощенной формѣ, предложенной покойнымъ академикомъ *Буняковскимъ* *). „Пусть будутъ двѣ прямыя АС и BD **), пересѣченныя третьей АВ такъ, что сумма внутреннихъ угловъ CAB и ABD менѣе двухъ прямыхъ. Надобно доказать, что прямыя АС и BD, достаточно продолженныя, пересѣкутся. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сумма смежныхъ угловъ ABD и DBE равна двумъ прямымъ, то уголъ DBE будетъ болѣе угла CAB; слѣдовательно неопредѣленное пространство CAE будетъ менѣе неопредѣленнаго пространства DBE. Отсюда прямо заключаемъ, что уголъ DBE не можетъ вмѣщаться въ углѣ CAE, почему прямая АС, по достаточномъ ее продолженіи, должна пересѣчь линію BD“. „Какъ-бы это заключеніе съ перваго взгляда не казалось естественнымъ, — прибавляетъ *Буняковскій*, — можно однакожъ предложить сомнѣніе на счетъ безусловной его строгости. Пусть будетъ АМС кривая линія, имѣющая прямолинейную ассимптоту BD, перпендикулярную къ АЕ. При такомъ условіи казалось-бы очевиднымъ, что безконечное пространство CAE болѣе объемлемаго имъ пространства прямого угла DBE. Съ другой стороны, если изъ точки А возстановимъ къ АЕ перпендикуляръ AF, то заключимъ на томъ же основаніи, какъ и прежде, что то самое пространство CAE, вмѣщающееся теперь въ прямомъ углѣ FAE, менѣе сего послѣдняго. Такимъ образомъ мы приведены къ двумъ противорѣчащимъ одно другому заключеніямъ, именно, что безконечное пространство CAE въ одно время и болѣе и менѣе прямого угла“.

„*Бертранъ* и по примѣру его *Лежандръ*, — говоритъ *Лобачевскій* ***), — хотѣли сравнить безконечныя площади въ углахъ и между перпендикулярами. Этого рода доказательствамъ должно-бы предшествовать опредѣленіе величины, которую въ геометріи можно понимать только вмѣстѣ съ измѣреніемъ, при томъ условясь напередъ, по какимъ признакамъ различаются большее съ меньшимъ“.

безконеченъ (infini), но только неограниченъ (indéfini). Между тѣмъ и другимъ есть значительная разница: чтобы сказать, что вещь безконечна, надо имѣть основаніе признать ее таковою, но чтобы сказать, что она не ограничена достаточно лишь не имѣть основанія указать ея границы“. Для моихъ цѣлей нѣтъ надобности различать эти термины и поэтому я только мимоходомъ указываю на это различіе и отсылаю читателей за болѣе подробнымм справками къ весьма интересной книгѣ: *Декартъ*. „Разсужденіе о методѣ, какъ хорошо направлять свой разумъ и отыскивать научныя истины“. Переводъ и объясненія заслуж. профессора *Любимова*. Исходя изъ соображенія о законѣ сохраненія энергіи и пр., профессоръ приходитъ въ заключенію, что „чтобы быть послѣдовательными мы должны признать міръ конечнымъ“.

*) *Буняковскій*. Параллельныя линіи, стр. 14.

**) Просимъ читателей сдѣлать чертежъ.

***) *Лобачевскій*. Полное собраніе сочиненій по геометріи, Т. I, стр. 222.

„Если проведены на плоскости равноотстоящія параллельныя линіи,—говоритъ *Дюгамель* [1]),—то было бы несообразно считать, что безконечныя площади, заключенныя между этими послѣдовательными параллельными, равны между собою.

Я не смѣю утомлять вниманіе читателей другими грубыми парадоксами, относящимися къ той же области. Изложеннаго, кажется, достаточно для того, чтобы прійти къ убѣжденію, что „безконечные“ объекты вовсе не подлежатъ математическимъ операціямъ. Заключеніе это впрочемъ нѣсколько подкрѣпится въ слѣдующемъ параграфѣ, гдѣ трактуемый терминъ будетъ разсмотрѣнъ въ двухъ параллельныхъ значеніяхъ.

III [2]).

Другой, гораздо болѣе важный смыслъ термина „безконечность“ прекрасно выражается слѣдующими словами *Архита* [3]), греческаго математика, жившаго за 400 л. до Р. Х.: „Если я предположу, что нахожусь на предѣлѣ вселенной, то могу-ли я достать рукою или тростью внѣ вселенной? Сказать, что я не могу, будетъ нелѣпо, но если я могу, то есть нѣчто внѣ вселенной — или тѣло, или мѣсто. И какъ-бы ни разсуждали, тотъ-же вопросъ представляется всегда, и если есть нѣчто, что можно достать тростью, то безконечность существуетъ“.

Ясно, что представленіе *Архита* относится къ тѣмъ перемѣннымъ величинамъ, которыя мы теперь называемъ безконечно-большими [4]), и замѣчательно, какъ давно составилось правильное понятіе объ этихъ послѣднихъ [5]).

Метафизическое представленіе о постоянной безконечности, проникшее впослѣдствіи въ математику, на нашло себѣ почвы въ классическомъ греческомъ духѣ. „Безконечное,—говоритъ *Аристотель* [6]), существуетъ только въ потенціальной возможности, но не такъ, чтобы когда нибудь можно было найти нѣчто осязательное, какъ опредѣленно

---

[1]) *Дюгамель.* Основанія исчисленія безконечно-малыхъ, стр. 15.

[2]) Параграфъ этотъ не имѣетъ ни малѣйшей претензіи изслѣдовать вопросъ о безконечности съ философской стороны. Здѣсь просто приводится нѣсколько ярко выраженныхъ формулировокъ, способныхъ разъяснить дѣло и съ математической точки зрѣнія. При всемъ томъ нижеизложенное до IV можетъ быть выпущено безъ особеннаго ущерба для пониманія дальнѣйшаго.

[3]) *Ващенко-Захарченко.* Исторія математики, стр. 33.

[4]) Это разсужденіе,—говоритъ проф. *Ващенко-Захарченко.* (Исторія математики, стр. 33), — переведенное на нашъ математическій языкъ, значитъ: безконечно-большая величина есть величина больше всякой данной величины, а безконечно-малая—менѣе всякой данной величины.

[5]) Это особенно бросается въ глаза, если сопоставить приведенные слова Архита со слѣдующими соображеніями, высказанными *Декартомъ* двадцать вѣковъ спустя: „Гдѣ-бы мы не вообразили предѣлы вселенной, мы всегда можемъ вообразить внѣ ихъ пространство, неопредѣленно простирающееся. И мы нетолько воображаемъ это пространство, но и ясно понимаемъ, что такъ есть въ дѣйствительности, какъ мы воображаемъ“. (*Декартъ.* Разсужденіе о методѣ дабы хорошо направлять свой разумъ и отыскивать научныя истины. Переводъ и поясненія *Любимова*, заслуженнаго профессора Московскаго Университета, стр. 285).

[6]) *Ващенко-Захарченко.* Исторія математики, стр 58.

безконечное, которое было-бы безконечно на самомъ дѣлѣ, но оно существуетъ всегда только въ возникновеніи и прохожденіи и, хоть оно всякій разъ и ограничено, но все-таки всегда и постоянно различно".

По ясности и опредѣленности цитата эта граничитъ со слѣдующею, принадлежащею *Гоббсу*: *) „Ни въ чьемъ умѣ не можетъ возникнуть образа безконечной величины, ни одинъ человѣкъ не можетъ имѣть представленія о безконечной скорости, ни о безконечномъ времени, ни о безконечной силѣ. Называя что нибудь безконечномъ, мы выражаемъ только, что не въ состояніи постичь конца и предѣловъ названной вещи; у насъ есть представленіе не о вещи, но о своей собственной неспособности".

Интересно сопоставить эти мнѣнія съ слѣдующими словами *Паскаля*: **) „ Nous connoissons qu'il y a un infini, et nous ignorons sa nature. Ainsi, par exemple, nous savons qu'il est faux que les nombres soient finis: donc il est vrai qu'il y a un infini en nombre. Mais nous ne savons ce qu'il est. Il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair; car, en ajoutant l'unité, il ne change point de nature: cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou impair; il est vrai que cela s'entend de tous nombres finis".

„On peut donc bien connoître qu'il y a un Dieu sans savoir ce qu'il est: et vous ne devez pas conclure qu'il n'y a point de Dieu, de ce que nous ne connoissons pas parfaitement sa nature".

„L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien, non plus qu'un pied à une mesure infinie. Le fini s'anéantit en présence de l'infini, et devient un pur néant. Ainsi notre esprit devant Dieu; ainsi notre justice devant la justice divine. Jl n'y a pas si grande disproportion entre l'unité et l'infini qu'entre notre justice et celle de Dieu".

„Croyez-vous qu'il soit impossible que, Dieu soit infini sans parties? Oui. Je veux donc vous faire voir une chose infinie et indivisible: c'est un point se mouvant partout d'un vitesse infinie; car il est en tous lieux, et tout entier dans chaque endroit".

Тутъ уже допускается существованіе безконечнаго числа и простые и ясные образы одѣваются метафизическимъ мракомъ.

И такъ бываетъ всякій разъ, когда математику заставляютъ служить цѣлямъ, ей постороннимъ.

Съ этой точки зрѣнія любопытно сужденіе извѣстнаго аббата *Moigno* ***), отрицающаго существованіе безконечнаго числа тоже ради религіозныхъ цѣлей.

„Le nombre actuellement infini est-il possible? En ajoutant l'unité à l'unité, ou des groupes d'unités à des groupes d'unités, peut-on arriver à un nombre actuellement infini? A cette question ainsi posée, le simple bon sens répond sans hésiter non, évidemment non. Puisque chacun des nombres obtenus par des additions successives ne diffère du précédent que

---

*) *Льюисъ*. Исторія философіи. 1889 г., стр. 483.

**) Penseés de Blaise *Pascal*. MDCCCXXIX, стр. 202, 203, 322.

***) *Moigno*. Jmpossibilité du nombre actuellement infini. 1884. стр. 6.

par une unité ou un groupe d'unités, il est fini comme lui; tous ces nombres successifs sont nécessairement finis à la fois, le second par le premier, le troisième par le second, etc., etc. En outre, le résultat de ces successions d'unités ajoutées à elles-mêmes, de proche en proche, apparaît très clairement à l'esprit comme un nombre qui sera pair ou impair, premier ou non premier. Si ce nombre est pair, il ne-contiendra pas les nombres impairs: s'il est impair, il ne contiendra pas les nombres pairs qui pourraient naître d'additions nouvelles; s'il est premier, il ne sera pas le dernier des nombres premiers, puisqu'il est démontré dans beaucoup de Traités d'Arithmétique, dans celui de M. Bertrand, par exemple (p. 66), que la série des nombres premiers est illimitée: qu'étant donné un nombre premier aussi grand qu'on voudra, on peut immediatement en assigner un plus grand encore. Dans tous les cas, qu'il soit pair ou impair, premier ou non premier, ce nombre né de l'addition ne contiendra pas son carré, son cube, sa quatrième puissance, etc.; donc il est impossible qu'il soit infini" *).

Безполезно, мнѣ кажется, вдаваться въ разборъ цѣнности взглядовъ *Паскаля* и другихъ, ему подобныхъ, потому что они говорятъ вполнѣ сами за себя. Замѣчу только, что, по крайней мѣрѣ, съ математической точки зрѣнія въ нихъ нѣтъ самаго главнаго, — нѣтъ признаковъ безконечнаго числа, такъ что въ сущности не знаешь, о чемъ говоришь. Поэтому и сужденія о томъ, что прибавленіе конечной величины къ безконечной не увеличиваетъ послѣдней, — представляются, если не парадоксальными, то во всякомъ случаѣ совершенно безпочвенными.

„То, что будучи приложено къ величинѣ не увеличиваетъ ее, а отнятое не уменьшаетъ, есть ничто". Это сказалъ еще *Зенонъ* **).

„Не будемъ утомлять себя спорами о безконечномъ, говоритъ *Декартъ* ***), — было-бы нелѣпо, еслибы мы, будучи существами конечными, стали опредѣлять нѣчто о безконечномъ, стараясь, такимъ образомъ, его ограничить и понять (absurdum esset nos aliquid de infinito determinare adque sic illud quasi finire ac comprehendere conari). Не будемъ заботиться, чтобы отвѣтить спрашивающимъ, безконечна-ли половина безконечной линіи, четно или нечетно безконечное число и тому подобное, ибо такіе вопросы, полагаю, должны разсматривать лишь тѣ, кто воображаютъ умъ свой безконечнымъ".

Вотъ это настоящая реальная точка зрѣнія.

М. Попруженко (Оренбургъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

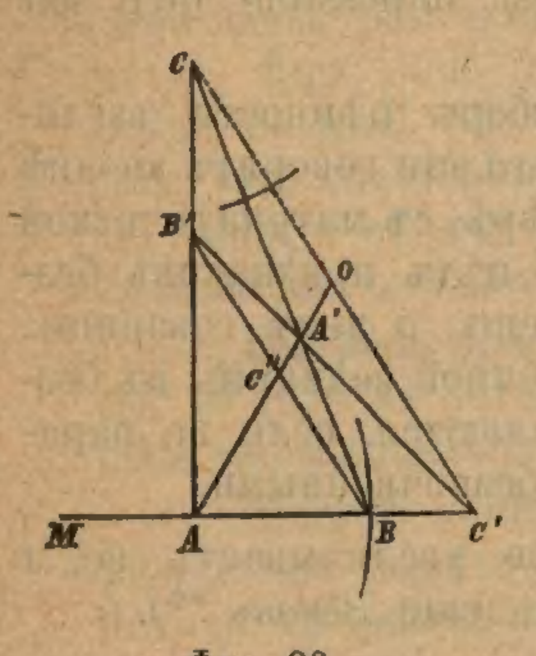
*) .... donc le nombre des hommes qui ont existé sur la terre est fini, et il y a eus un premier homme sorti forcément des mains d'un Dieu créateur; donc le nombre det révolutions de la Terre autour du soleil est fini, et il y a une premier révolution, e la Terre a été lancée dans son orbite par un volonté souveraine.

**) *Ващенко-Захарченко.* Исторія математики, стр. 59.

***) *Декартъ.* Разсужденіе о методѣ, дабы хорошо направлять свой разумъ. Переводъ и поясненія *Любимова*, стр. 256.

О соотношеніи сторонъ правильныхъ вписанныхъ въ кругъ многоугольниковъ *).

Евклидъ въ предложеніи 18-мъ XIII книги далъ на одномъ чертежѣ построеніе сторонъ пяти правильныхъ тѣлъ; тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Но это построеніе не отличается ни цѣльностью, ни изяществомъ; тѣмъ не менѣе оно наводитъ на мысль искать соотношенія между сторонами правильныхъ вписанныхъ въ кругъ многоугольниковъ. Геометрически это соотношеніе получается построеніемъ при помощи дѣленія *одного* отрѣзка въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и проведенія *одной* параллели.



Фиг. 30.

На сторонахъ прямого угла A отложимъ отъ вершины два отрѣзка AB′ и AC′, равныхъ радіусу круга, изъ которыхъ послѣдній раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи **); соединимъ B съ B′ прямою, чрезъ C′ проведемъ прямую CC′, параллельную BB′, и соединяемъ прямою C съ B, C′ съ B′, а также A съ A′. Тогда построенную фигуру AA′BB′CC′ можно разсматривать, какъ *полный четырестоpонникъ* или *четыреугольникъ;* въ первомъ случаѣ — сторонами служатъ AC, AC′, BC, B′C′, а діагоналями AA′, BB′, CC′, во второмъ — вершинами точки A, A′, B, B′, а діагональными точками C, C′, C″.

Въ построенномъ такимъ образомъ полномъ четыреугольникѣ (или четырестороннинѣ) отрѣзки AC′ и AB′, очевидно, представляютъ сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника—a_6, отрѣзокъ AB—сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника a_{10}, B′C′ — сторону вписаннаго квадрата a_4, BB′ — сторону пятиугольника a_5. Легко показать, что AC есть сторона правильнаго вписаннаго звѣзднаго десятиугольника, а діагональ CC′ — звѣзднаго пятиугольника.

Дѣйствительно, по построенію:

$$CA : B'A = C'A : BA \text{ или}$$

$$CA : C'A = C'A : BA,$$

т. е. CA есть длина, которую получимъ, если CA′ *внѣшне* раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

---

*) Сообщено въ Математическомъ Отдѣленіи по Эл. Математикѣ и Физикѣ Новороссійскаго Общ. Естествоиспытателей.

**) Для чего, всего удобнѣе, продолживъ AC′ влѣво на длину AM=$^1/_2$ AC′, изъ M, какъ центра, описать окружность радіусомъ MB′, которая и раздѣлитъ AC′ въ точкѣ B въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Но

$$AC = AB' + B'C,$$

а $B'C = AB = r.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, слѣдовательно:

$$AC = r + r.\frac{\sqrt{5}-1}{2} = r.\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$ т. е. сторонѣ звѣзднаго десятиугольника.

Изъ того же построенія вытекаетъ, что

$$CC' : BB' = AC' : AB = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

слѣдовательно,

$$CC' = BB' : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = r.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

т. е. CC' есть сторона правильнаго вписаннаго звѣзднаго пятиугольника.

Далѣе, докажемъ, что CB есть сторона правильнаго вписаннаго треугольника — a_3.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2,$$ или, такъ какъ

$$AC = r.\frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ и } AB = r.\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$ то

$$\overline{CB}^2 = r^2.\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right\}.$$

Но выраженіе, стоящее въ скобкахъ, равно 3, слѣдовательно,

$$\overline{CB}^2 = 3r^2, \text{ а } CB = r.\sqrt{3} = a_3.$$

Опредѣлимъ изъ того же чертежа еще и сторону пятнадцатиугольника. Для этого докажемъ предварительно такое свойство діагоналей полнаго четыреугольника: *если двѣ діагонали полнаго четыреугольника параллельны, то онѣ двоятся третьей* *).

---

*) Это вытекаетъ само собою изъ общаго свойства діагоналей полнаго четыресторонника: *каждая діагональ полнаго четыресторонника двумя вершинами и точками пересѣченія съ двумя другими діагоналями дѣлится гармонически*. Данный случай есть частный, когда одна изъ четырехъ гармоническихъ точекъ (BB', CC') находится въ безконечности, такъ что гармоническое дѣленіе переходитъ въ дѣленіе пополамъ: O есть средина CC', а потому и C'' средина BB'.

См. Chasles, Traité de Géometrie Supérieure, § 350.

Мы просимъ читателя провести чрезъ C параллель $B'A'$ и чрезъ C' параллель $A'B$, которыя пересѣкутся въ точкѣ A''. Тогда A, A', A'',— какъ это легко заключить изъ теоремъ о пропорціональныхъ отрѣзкахъ, отсѣкаемыхъ параллелями на сторонахъ угла,— лежатъ на одной прямой, которой часть $A'A''$ есть одна изъ діагоналей параллелограмма $CA''C'A'$, а потому она дѣлитъ CC' пополамъ въ точкѣ O.

Далѣе, замѣтимъ еще, что стороны полнаго четыреугольника BC и $B'C'$, пересѣкаясь въ точкѣ A', дѣлятся въ этой точкѣ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Дѣйствительно, изъ подобія $\triangle CA'C'$ и $\triangle BA'B'$ слѣдуетъ:

$$CA' : A'B = C'A' : A'B' = CC' : BB',$$

но отношеніе $CC' : BB'$ равно $AC' : AB$, слѣдовательно, діагонали CB и $C'B'$ въ точкѣ A' дѣлятся въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

На основаніи вышеизложеннаго легко опредѣлить CA'.

$$CA' = CB . \frac{\sqrt{5}-1}{2} = r . \sqrt{3} . \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

Если CA' раздѣлить пополамъ и отнять эту половину отъ половины діагонали CC', т. е. отъ CO, что можно сдѣлать, описавъ изъ C дугу радіусомъ $\frac{CA'}{2}$, то полученная разность$=a_{15}$, такъ какъ

$$\frac{CC'}{2} - \frac{CA'}{2} = \frac{r}{2} . \left[\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\right],$$

а послѣднее выраженіе и есть формула стороны вписаннаго пятнадцатиугольника.

Къ этимъ выводамъ относительно сторонъ правильныхъ вписанныхъ въ кругъ многоугольниковъ мы присоединимъ замѣчательное свойство діагоналей разсматриваемаго полнаго четыреугольника.

Изъ пропорціи:

$$CC' : BB' = AC' : AB$$

слѣдуетъ, что $BB' = a_5$ есть бо́льшій отрѣзокъ CC' (стороны звѣзднаго пятиугольника $= z_5$), раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Докажемъ, что меньшій отрѣзокъ той же CC' равенъ третьей діагонали AA'. Для этого, сначала покажемъ, что $AO = CO$, т. е. $\frac{1}{2}\, CC'$.

На основаніи одной изъ теоремъ элементарной геометріи:

$$2\,\overline{AO}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{C'A}^2 - 2\,\overline{CO}^2$$

$$\text{или}\quad \overline{AO}^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{C'A}^2}{2} - \overline{CO}^2 ;$$

подставляя значенія $CA=r.\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $C'A=r$, получимъ:

$$\overline{AO}^2=r^2.\frac{10+2\sqrt{5}}{8}-r^2.\frac{5+\sqrt{5}}{8}=r^2.\frac{5+\sqrt{5}}{8};$$

слѣд.,

$$AO=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=\frac{CC'}{2}.$$

Но AO въ точкѣ C'' дѣлится въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, слѣд., AC''—бóльшій и $C''O$—меньшій отрѣзокъ, а $C''O$, въ свою очередь, также дѣлится въ точкѣ A' въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, причемъ $C''A'$—меньшій, а $A'O$—бóльшій отрѣзокъ.

Такимъ образомъ,

$$AC''=AO.\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ а } C''O=AO.\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

далѣе,

$$A'O=C''O.\frac{\sqrt{5}-1}{2}=AO.\frac{3-\sqrt{5}}{2}.\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Діагональ AA' равна $AO-A'O$, слѣдовательно, подставля найденное значеніе для $A'O$, получимъ:

$$AA'=AO-AO.\frac{3-\sqrt{5}}{2}.\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

или

$$AA'=AO\ (1-\sqrt{5}+2)=AO.(3-\sqrt{5}),$$

или

$$AA'=CC'.\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

т. е. AA' есть меньшій отрѣзокъ CC', раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Изъ этого предложенія и изъ того, что діагональ BB' есть бóльшій отрѣзокъ CC', раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, слѣдуетъ, что

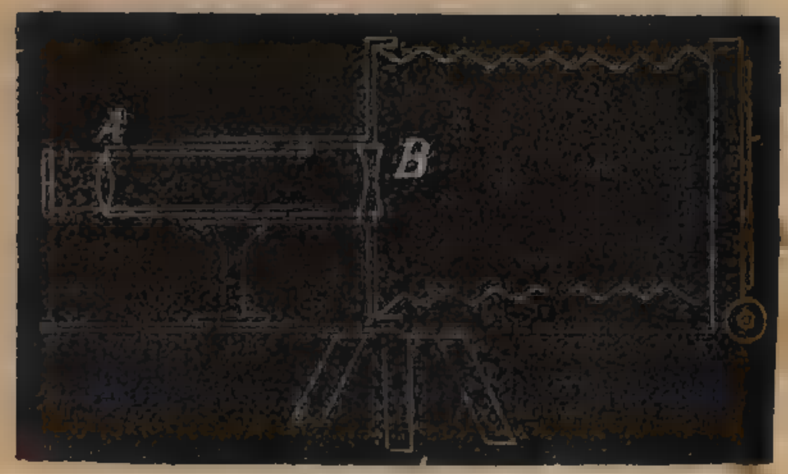
$$CC'=AA'+BB',$$

т. е. *большая діагональ разсматриваемаго полнаго четырехсторонника равна суммѣ двухъ другихъ.*

Э. Пфейферъ (Одесса).

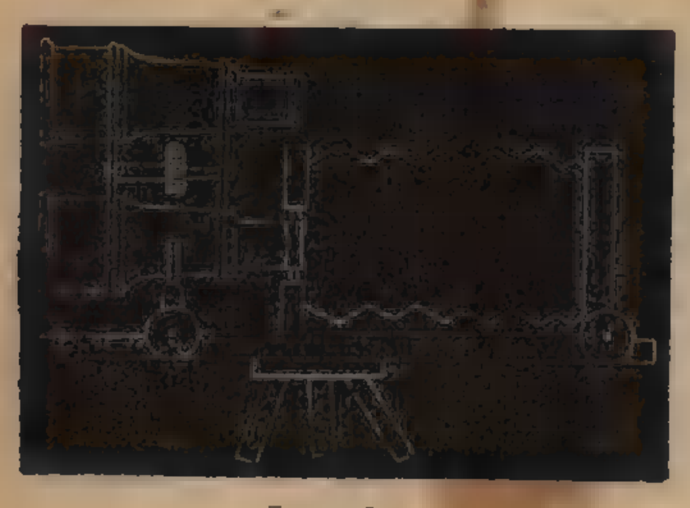
ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Фотографированіе отдаленныхъ предметовъ. Большія трудности и неудобства вслѣдствіе необходимости перевозить аппаратъ при фотографированіи отдаленныхъ предметовъ отчасти устранены приспособленіемъ J. Yretwell'я, впервые описанномъ въ „American Amateur Photographer". Именно Yretwell къ обыкновенной камерѣ обскурѣ придѣлываетъ вмѣсто обыкновеннаго объектива—простой телескопъ, а послѣ—просто биноклъ.



Фиг. 31.

Фиг. 31 представляетъ камеру обскуру съ телескопомъ. Этотъ послѣдній любитель можетъ построить изъ двухъ картонныхъ трубокъ, плотно входящихъ одна въ другую и оклеенныхъ матеріей и изъ двухъ стеколъ, одного двояковыпуклаго (A) и другого вогнутаго (B). Линія передъ A означаетъ щель для діафрагмы.


Фиг. 32.

Фиг. 32 представляетъ приспособленіе къ камерѣ обскурѣ бинокля, дающее также очень хорошіе результаты. Время экспозиціи, измѣняющееся при обыкновенныхъ условіяхъ отъ 15 до 20 секундъ, не можетъ быть напередъ опредѣлено, такъ какъ всецѣло зависитъ отъ настоящихъ условій; замѣтимъ, что даже съ весьма чувствительными пластинками невозможно получить мгновенныхъ снимковъ.

Опыты Yretwell'я показали, что камера около 25 цм. длиной съ телескопомъ въ 20 цм. даетъ тѣ же результаты, что и камера обскура, снабженная обыкновеннымъ объективомъ съ фокуснымъ разстояніемъ въ 85 цм.

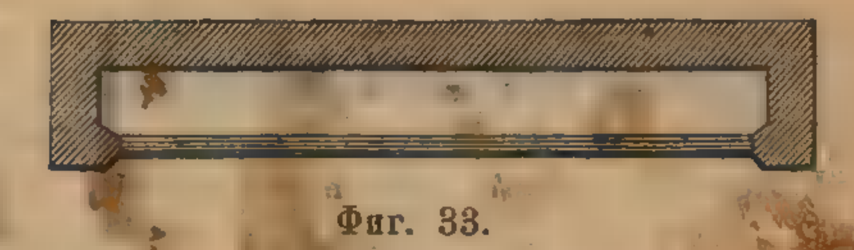
Такъ, діаметръ часовъ на одной церкви на разстояніи 300 метр., воспроизведенный обыкновенной камерой обскурой (фокусн. разст. 25 цм.) былъ не болѣе 3 *mm.*, между тѣмъ какъ теле-фотографическій способъ далъ изображеніе въ 25 *mm.* съ массой деталей, невидимыхъ въ первомъ случаѣ.

П. П.

Различіе въ расширеніи двухъ металловъ можно показать непосредственно слѣдующимъ простымъ способомъ.

Желѣзный (или стальной) стержень 15—18 см. длины вставляется

между концами толстой цинковой пластинки такой формы, какъ представлено на рисункѣ. При обыкновенной температурѣ стержень не долженъ быть зажатъ слишкомъ сильно. — Если погрузить приборъ въ теплую (или, если нужно, горячую) воду, то желѣзный стержень выпадаетъ, т. к. коэф. расширенія желѣза въ $2\frac{1}{2}$ раза меньше, чѣмъ цинка.



Фиг. 33.

Н. Дрентельнъ.

Простая форма воздушнаго термометра (М. Корпе). Хотя воздушный термометръ даетъ наиболѣе точныя показанія, тѣмъ не менѣе до сихъ поръ нѣтъ простой, удобной его формы, поэтому предлагаемая форма заслуживаетъ вниманія.

Рисунокъ (фиг. 34) представляетъ въ $^1/_{15}$ натуральной величины капиллярную трубку (I) въ 2 mm. внутренняго діаметра. Нижняя часть трубки наполнена сухимъ воздухомъ, разрѣженнымъ на $^1/_4$ атмосферы. Воздухъ сжатъ столбикомъ ртути въ 200 mm. вышиной, въ верхней же части трубки — пустота. При температурѣ 20°С. воздухъ занимаетъ длину около 586 mm. и при нагрѣваніи на каждый градусъ расширяется приблизительно на 2 mm. Очевидно, воздухъ находится подъ постояннымъ давленіемъ. Расширеніе стекла такъ ничтожно сравнительно съ расширеніемъ воздуха, что имъ смѣло можно пренебречь.

Если не приходится имѣть дѣло съ температурами ниже—73°, то нижнюю часть трубки можно обратить въ шарикъ (II) 14—15 mm. діаметра. Для большей чувствительности шарикъ долженъ быть сдѣланъ изъ тонкаго стекла, но на столько крѣпокъ, чтобы выдержать давленіе внѣшняго воздуха.

При опредѣленіи постоянныхъ точекъ и вообще при измѣреніи температуры нужно нагрѣвать всю трубку, а не только шарикъ, такъ какъ воздухъ заключенный въ трубкѣ, составляетъ значительную часть воздуха въ шарикѣ.

Фиг. 34.

Такъ какъ термометръ долженъ быть всегда вертикаленъ, то снизу припаивается еще шарикъ съ дробью или ртутью.

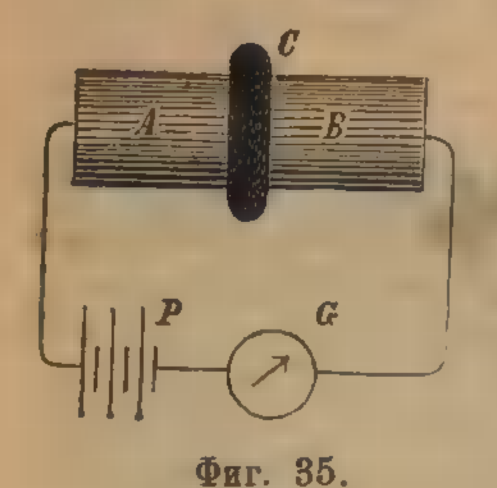
Если медленно наклонить термометръ, то воздухъ расширится и ртуть съ трескомъ ударится о верхній конецъ трубки.

Для переноски и при приготовленіи приборъ перевертывается (III).

П. П.

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

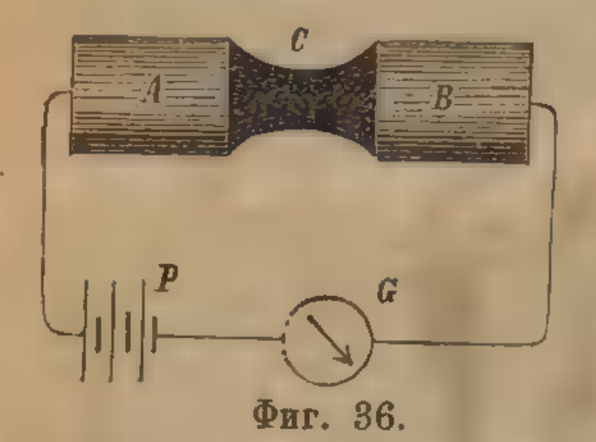
Новый микрофонъ Кламона. Всѣ существующіе до сихъ поръ микрофоны обладаютъ крупнымъ недостаткомъ, а именно неспособностью передавать звуки очень различной интенсивности. Это происходитъ отъ того, что всѣ они основаны на одномъ и томъ же принципѣ, именно, на сопротивленіи контакта *). Если давленіе въ точкахъ контакта слабо, то телефонъ передаетъ только слабые звуки, наоборотъ, если давленіе слишкомъ сильно, то микрофонъ теряетъ свою чувствительность.



Фиг. 35.

Кламонъ останавливается на новомъ принципѣ измѣненія сопротивленія пластическихъ, деформируемыхъ тѣлъ. Ему удалось изготовить изъ проводящихъ порошковъ и полупроводящихъ жидкостей массу опредѣленной проводимости.

Помѣстимъ въ цѣпь баттареи P гальванометръ G и два металлическіе электрода, соединенные между собой цилиндромъ изъ массы. При сближеніи и удаленіи электродовъ, цилиндръ принимаетъ формы, изображенныя на фиг. 35 и 36. Въ первомъ случаѣ сопротивленіе уменьшается, во второмъ увеличивается и гальванометръ покажетъ это измѣненіе тока. Если цилиндръ A прикрѣпленъ къ діафрагмѣ, а B неподвиженъ и въ цѣпь включенъ телефонъ, то вибраціи діафрагмы, производимыя звуками, будутъ передаваться въ точности діафрагмѣ телефона, какова бы ни была сила даннаго звука.



Фиг. 36.

П. П.

Новый снарядъ для измѣренія морскихъ глубинъ придуманъ французскимъ техникомъ Реньяромъ. Это тяжелый мѣдный сосудъ емкостью въ 100 литровъ, снабженный въ верхней своей части тремя кранами. Одинъ изъ этихъ крановъ соединенъ съ толстостѣннымъ пустымъ внутри сплюснутымъ каучуковымъ мѣшкомъ. При погруженіи снаряда въ воду отверстіе крана, соединеннаго съ каучуковымъ мѣшкомъ, остается закрытымъ. Вода наполняетъ цилиндръ и, по мѣрѣ его опусканія, сжимается на каждый метръ глубины на 0,0000043 своего объема. Коснувшись дна, сосудъ ложится на бокъ и кранъ, черезъ который сосудъ наполнился, автоматически закрывается при помощи рычага. При поднятіи снаряда вода въ сосудѣ расширяется, открываетъ своимъ давленіемъ кранъ, соединенный съ каучуковымъ мѣшкомъ и переходитъ въ этотъ послѣдній. Вытащивъ снарядъ, отвинчиваютъ каучуковый мѣшокъ и воду изъ него выливаютъ въ грауированную

*) Исключеніе представляетъ трудноисполнимый микрофонъ Cuttriss'а. См. В. О. Ф. XXIII сем. стр. 44.

трубку. Разность объемовъ воды, наполняющей снарядъ въ поверхностныхъ слояхъ моря и на глубинѣ, даетъ возможность легко вычислить глубину, на которую снарядъ погружается. Такъ, при глубинѣ въ 10 метр. эта разность равна для снаряда Реньяра 4.3 кубич. сант., а при глубинѣ въ 3.000 метр.—уже 1,29 литра. *В. Г.*

Усовершенствованіе въ компасѣ сдѣлано французскимъ лейтинантомъ Леплэ. Онъ приспособилъ къ обыкновенному Томсоновскому компасу систему зеркалъ, отбрасывающихъ свѣтъ лампы на циферблатъ компаса. Въ компасѣ для этого продѣланы два отверстія: одно сверху, другое снизу и на циферблатъ проэктируются двѣ свѣтлыя линіи. При установкѣ курса судна зеркаламъ даютъ такое положеніе, чтобы обѣ свѣтлыя линіи сливались въ одну. При самомъ незначительномъ уклоненіи судна отъ принятаго направленія обѣ свѣтлыя линіи расходятся, что, конечно, несравненно легче замѣтить, чѣмъ слѣдить за положеніемъ стрѣлки, особенно ночью.

В. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Опыты Moissan'а надъ полученіемъ высокихъ температуръ *) пріобрѣтаютъ уже и практическое значеніе. Его электрическій горнъ даетъ возможность выдѣлять изъ руды въ нѣсколько минутъ самые тугоплавкіе металлы. Такъ напр., въ 10 минутъ Moissan'у удалось получить до 200 граммовъ урана; хромъ и марганецъ выдѣляются изъ своихъ рудъ (хромовый желѣзнякъ и пиролюзитъ) въ чистомъ видѣ въ нѣсколько минутъ.

Премія въ 3000 лиръ назначена венеціанской академіей наукъ (Reale Jstituto Veneto di scienze, lettore ed arti) за составленіе краткой исторіи математики и математической хрестоматіи. Послѣдняя должна содержать извлеченія изъ математическихъ сочиненій древнихъ, среднихъ и новыхъ вѣковъ, до Гауса включительно. Достаточно указать автора, заглавіе, размѣръ извлеченія и изданіе. Кромѣ того передъ каждой статьей хрестоматіи должны быть помѣщены тѣ соображенія, на основаніи которыхъ авторъ включилъ ее въ сборникъ. Сочиненія могутъ быть написаны на итальянскомъ, французскомъ, нѣмецкомъ и англійскомъ языкахъ. Срокъ подачи 31 декабря 1893 года.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ [1]).

Школа техническаго черченія. Пособіе для реальныхъ, техническихъ и другихъ училищъ, а также и для самообученія. Вып. II. Чертежи (XX таблицъ). Составилъ и издалъ *Г. З. Рябковъ,* препод. Одесск. реальн. училища. Одесса. 1891. Ц. 2 р.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 157, стр. 19.

[1]) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 159.

— Вып. III. Паркеты и орнаменты. Пособіе для реальныхъ, техническихъ училищъ, а также для паркетныхъ мастеровъ и маляровъ. Одесса. 1892. Складъ изданія у автора. Ц. 2 р. 50 к.

Систематическій указатель статей, напечатанныхъ въ Педагогическомъ Сборникѣ за время отъ 1882 до 1892 г. включительно. Спб. 1893.

Московскій Библіографическій Кружокъ. Списокъ періодическихъ изданій, выходящихъ въ Россіи на 1893 годъ. Москва. 1893. Ц. 50 к.

Галилео Галилей. Рѣчь профессора *П. А. Зилова*, читанная 1-го февраля 1893 года въ общемъ собраніи Варшавскаго Общества Естествоиспытателей. Варшава. 1893.

Введеніе въ ученіе объ электричествѣ. Чтенія *Б. Ю. Кольбе*, преподавателя въ училищѣ св. Анны въ С.-Петербургѣ. I. Статическое электричество. Съ 75 рис. въ текстѣ. Изд. К. Л. Риккера. Спб. 1893. Ц. 1 р. 20 к.

Ключъ къ рѣшенію ариѳметическихъ задачъ на всѣ „правила“. Составилъ *Н. В. Шпаковичъ*. Кіевъ. 1893.

ЗАДАЧИ.

№ 464. Вывести формулу объема шара, разсматривая этотъ объемъ, какъ предѣлъ суммы объемовъ элементарныхъ цилиндровъ (входящихъ и выходящихъ), имѣющихъ основаніями сѣченія шара параллельными плоскостями, когда число элементарныхъ цилиндровъ безпредѣльно увеличивается.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 465. Построить треугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по отношенію между третьей стороной и высотой, на нее опущенной.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 466. Доказать теорему: ситерціана стороны треугольника есть терціана ея антипараллели.

NB. Ситерціаной, по аналогіи съ симедіаной, назовемъ прямую, равнонаклонную терціанѣ. *)

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 467. Разность кубовъ двухъ сосѣднихъ подходящихъ дробей равна 27360 : 3511808. Опредѣлить эти дроби.

И. Александровъ (Тамбовъ).

---

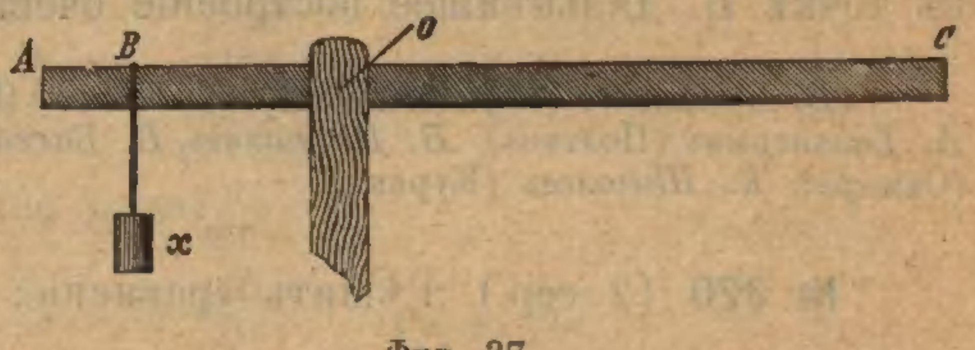
*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 154, стр. 210, задача 420 или № 56, стр. 256, зад. 430 и 431.

№ 468. Рѣшить уравненіе

$$ab=(a-x)\ (b+\sqrt{x^2-b^2}).$$

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 469. Данъ двуплечій рычагъ (фиг. 37), поперечный разрѣзъ котораго q, а удѣльный вѣсъ s. Найти вѣсъ x, при которомъ рычагъ находится въ равновѣсіи, если извѣстно, что $AB=l$, $BO=l_1$, $CO=l_2$.



Фиг. 37.

Бхм. (Софія).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 302 (2 сер.). Нѣкто купилъ сукна двухъ сортовъ; за каждый аршинъ перваго сорта онъ платилъ столько копѣекъ, сколько единицъ въ числѣ, которое въ 7 разъ больше числа купленныхъ имъ аршинъ этого сукна, за каждый аршинъ второго сорта онъ платилъ столько копѣекъ, сколько купилъ аршинъ этого сукна; за всё сукно 1-го сорта заплачено одной копѣйкой меньше, чѣмъ за всё сукно второго сорта. Спрашивается, по скольку было куплено сукна каждаго сорта, если оно было не дороже 3 р. 50 к. и не дешевле 1 р. за аршинъ?

Число аршинъ въ первомъ кускѣ пусть будетъ x, тогда цѣна его $7x^2$ коп.

Число аршинъ во второмъ кускѣ y, стоимость его y^2. По условію

$$y^2-7x^2=1.$$

Такъ какъ $\sqrt{7}$ число ирраціональное, то это ур-іе всегда можно рѣшить въ цѣлыхъ числахъ, для чего $\sqrt{7}$ представимъ въ видѣ непрерывной дроби, коей приближенія будутъ

$$\frac{2}{1};\ \frac{3}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{37}{14};\ \frac{45}{17};\ \frac{82}{31};\ \frac{127}{48};\ \frac{590}{223};\ldots$$

Рѣшеніями уравненія будутъ $y=8$, $x=3$; $y=127$, $x=48$ и т. д.

Требованіямъ задачи удовлетворяютъ $x=48$ и $y=127$. Цѣна аршина перваго куска 3 р. 36 к., второго 1 р. 27 к.

А. П. (Пенза); *В. Россовская*, *К. Геншель* (Курскъ); *О. Озаровская* (Спб.).

№ 306 (2 сер.). Построить треугольникъ по данному углу B и по двумъ медіанамъ m_a и m_b.

На произвольной прямой откладываемъ $Aa = m_a$, описываемъ на Aa дугу, вмѣщающую $\angle$ B. Такъ какъ медіаны дѣлятся въ отношеніи 2 : 1, то, раздѣливъ Aa на 3 части, изъ одной изъ точекъ дѣленія опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ $^2/_3\ m_b$, которая пересѣчетъ первую дугу въ точкѣ B. Дальнѣйшее построеніе очевидно.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *X. Едлинъ* (Кременчугъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Гальперинъ* (Полтава); *В. Шишаловъ*, *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознесенскъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 320 (2 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$(x+a+b)^5 = x^5 + a^5 + b^5.$$

Разложивъ $(x+a+b)^5$, принимая $a+b$ за одинъ членъ, замѣтимъ, что уравненіе дѣлится на $a+b$. Также найдемъ, что оно дѣлится на $x+a$ и на $x+b$. Поэтому $-a$ и $-b$ суть корни уравненія. Остальные корни получимъ изъ уравненія

$$x^2 + (a+b)x + a^2 + ab + b^2 = 0.$$

В. Рудинъ (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 351 (1 сер.). Доказать, что уравненіе

$$\frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x+a_n} = Ax + B$$

не имѣемъ мнимыхъ корней, если A, A_1 $A_2, \ldots, A_n$ положительны (Теорема Ліувилля):

Положимъ, что данное уравненіе имѣетъ корень вида $p+q\sqrt{-1}$. Тогда оно должно имѣть и другой мнимый корень вида $p-q\sqrt{-1}$. Такимъ образомъ мы получимъ два тождества

$$\frac{A_1}{p+q\sqrt{-1}+a_1} + \frac{A_2}{p+q\sqrt{-1}+a_2} + \cdots + \frac{A_n}{p+q\sqrt{\ 1}+a_n} = A(p+q\sqrt{-1}) + B$$

$$\frac{A_1}{p-q\sqrt{-1}+a_1} + \frac{A_2}{p-q\sqrt{-1}+a_2} + \cdots + \frac{A_n}{p-q\sqrt{-1}+a_n} = A(p-q\sqrt{-1}) + B$$

Вычитая эти тождества почленно, находимъ

$$\frac{-2A_1q\sqrt{-1}}{(p+a_1)^2+q^2} + \frac{-2Aq\sqrt{-1}}{(p+a_2)^2+q^2} + \cdots + \frac{-A_n\,q\sqrt{-1}}{(p+a_n)^2+q^2} = 2Aq\sqrt{-1}$$

или

$$\frac{A_1}{(p+a_1)^2+q^2}+\frac{A_2}{(p+a_2)^2+q^2}+\dots+\frac{A_n}{(p+a_n)^2+q^2}=-A$$

Такъ какъ $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ положительны, то это тождество не можетъ имѣть мѣста, а потому данное уравненіе не имѣетъ мнимыхъ корней.

С. Шатуновскій (Кам. Под.); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 495 (1 сер.). Даны два ряда:

$$a_1, a_2, a_3, \dots\dots\dots\dots a_{n-1}, a_n$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots\dots\dots\dots b_{n-1}, b_n.$$

Между членами этихъ рядовъ существуютъ такія зависимости:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \text{ и } b_n = a_{n-1}.$$

Предполагая, что n возрастаетъ до безконечности и что $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2 \dots$, найти предѣлъ дроби $\frac{a_n}{b_n}$.

1. Имѣемъ:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{a_{n-1}}=1+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{a_{n-2}+b_{n-2}}{a_{n-2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a_{n-2}}{b_{n-2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

2. Обозначивъ $\frac{a_n}{b_n}$ черезъ y, а періодъ черезъ x, получимъ

$$y=1+x, \text{ а } x=\frac{1}{1+x}, \quad x^2+x-1=0,$$

или

$$y^2 - y - 1 = 0 \text{, откуда}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Такъ какъ $a_n > b_n$, то

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ); *С. Блажко* (Хотимск.); *Я. Э.* (Могилевъ).

Задачи 2-й серіи, на которыя до сихъ поръ не получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія *).

№ 104. Въ „Элементарной Геометріи" А. Давыдова (въ концѣ главы V-ой) дана задача: „Описать кругъ, проходящій черезъ точку А и касательный къ прямой MN и къ данному кругу". Показать, что рѣшеніе этой задачи, помѣщенной въ томъ-же учебникѣ (въ концѣ), сбивчиво, ибо приводитъ учениковъ къ предположенію существованія только двухъ отвѣтовъ, между тѣмъ какъ въ общемъ случаѣ задача имѣетъ четыре рѣшенія. *Ш.*

№ 116. Передъ вращающимся круглымъ цилиндромъ, на которомъ натянута бумага, помѣщена вертикальная трубка не круглаго сѣченія. Изъ нея безъ шатаній подымается и опускается прямой стержень. Къ его концу надо прикрѣпить вставку съ обыкновеннымъ перомъ, которое-бы писало въ слѣдующихъ условіяхъ, возможно близкихъ къ нормальнымъ. Уголъ направленія пера, какъ съ горизонтомъ, такъ и съ поверхностью бумаги, долженъ равняться $41^0\ 48'\ 40''$. Опредѣлить положеніе пера. Кн. *А. Гагаринъ* (Спб.).

№ 130. Тригонометрическимъ путемъ **) найти зависимость между сторонами и діагоналями плоскаго или сферическаго четыреугольника. Показать, что для плоскаго четыреугольника эта зависимость можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+e^2-b^2 & a^2+d^2-f^2 \\ a^2+c^2-b^2 & 2e^2 & e^2+d^2-c^2 \\ a^2+d^2-f^2 & e^2+d^2-c^2 & 2d^2 \end{vmatrix} = 0$$

гдѣ a, b, c, d — послѣдовательныя стороны, а e и f — діагонали четыреугольника. Примѣнить найденную зависимость къ разнымъ частнымъ случаямъ. *М. Попруженко* (Оренбургъ).

*) См. „В. О. Ф." № 160.
**) Геометрическій методъ извѣстенъ и сложнѣе тригонометрическаго.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 29 Апрѣля 1893 г.
Центральная типо-литографія, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.